中国科学(E 辑)
第 30 卷 第 3 期 SCIENCE IN CHINA (Series E) 2000 年 6 月

一个渐近最优的非参数自适应控制器*

郭 雷 谢亮亮
(中国科学院系统科学研究所,北京 100080)

摘要 对一类具有未知非参数非线性结构的离散时间随机控制系统,利用核估计方法和截尾的必然等价原则,设计了一个非参数自适应控制器,并且证明了在不必人为地引进外部激励的情形下,由这个控制器所决定的闭环系统不但是全局稳定的而且是渐近最优的.

关键词 自适应控制 非参数辨识 随机系统 离散时间 最优性

在控制系统设计中,反馈主要用于减少不确定性对控制系统性能的影响. 系统的不确定性有两个来源:内部(结构)不确定性和外部(扰动)不确定性. 一般来讲,前者比后者难以对付. 在目前控制器设计方法中,鲁棒控制和自适应控制是两类可以对付具有较大结构不确定性系统的主要方法. 鲁棒控制通常假设系统的实际结构含在某一度量空间中的以一个已知标称模型为圆心的小球内,而自适应控制通常不需要这一假设.

对具有未知参数的线性有穷维系统,无论是含有随机噪声的系统还是具有未建模动态特性的系统,自适应控制理论目前已比较完善[1,2]. 对具有线性未知参数的非线性系统,如果非线性函数具有线性增长速度,那么上述理论可以不困难地推广过去[3]. 然而,当非线性函数具有非线性的增长速度时,最近的研究表明,上述推广一般是不可能的[4]. 这就说明若对非线性函数的增长没有任何限制,则离散时间与连续时间自适应控制[5]存在根本区别.

为了方便进一步讨论,设 $f(\cdot)$是描述控制系统动态的未知非参数非线性函数. 通过各种不同的逼近方法,可以将非参数函数转化为参数化函数(例如 Volterra 级数、人工神经元网或小波等). 这些方法基本上说的是,若自变量 x 在一个紧集内,那么 $f(\cdot)$便可被下列形式的参数化模型一致逼近:

$$g(\theta,x) \triangleq \sum_{i=1}^{N} a_i \sigma(b_i^{\tau} x),$$

其中 $\sigma(\cdot)$是"基函数",而 a_i 和 b_i 是未知参数.

这样,在自适应控制研究中,人们自然会用上述参数化模型取代原先的非参数模型. 这一方法看起来有较大的吸引力并且确实引起了大量研究(例见文献[6]),但是,仍有一些内在局限性和困难. 首先,为了保证可靠的逼近,自变量 x(通常代表系统的状态信号)需落在一个紧集内,这就要求控制系统首先具有稳定性,然而,在这方面参数模型很难起作用(若系统本身

2000-04-07 收稿
* 国家自然科学基金(批准号: 69425003)和国家"攀登"计划预选资助项目

不稳定). 其次，寻求未知参数 a_i 和 b_i 的值一般不可避免地要用非线性全局优化算法，而构造完成这一任务的一般性快速有效算法还很困难；而进一步，若将非线性优化和控制相结合（自适应控制）将使问题变得更加复杂. 再次，无论模型复杂程度(N)有多大，总会存在逼近误差，此误差又可导致控制性能指标的非渐近最优性. 因此，直接考虑非参数模型 $f(\cdot)$可能是有利的，并且，统计学中已有大量研究的非参数估计方法将会有用[7].

就作者所知，关于非参数自适应控制的第 1 个具体理论结果是由 Oulidi（见文献[7]）给出的，这个结果讨论了闭环系统的渐近最优性，但是采用了人为地引进外部激励的方法，并且假定了噪声的有界性.

在本文中，我们将证明对一类具有正态噪声的典型系统，在控制器设计中人为地引进外部激励信号的方法是不必要的. 本文的控制器设计采用了截尾的必然等价原理，这样既可保证在控制过程中所需的控制信号不会过大，又可保证被控系统的渐近最优性.

1　主要结果

考虑下列离散时间非线性控制模型：

$$y_{t+1} = f(y_t) + u_t + \varepsilon_{t+1}, \tag{1}$$

其中 y_t, u_t 和 ε_t 是 d 维的系统输出信号、输入信号及白噪声，而 $f(\cdot)$是未知的非线性函数.

我们的控制目标是，在每一时刻 t，仅根据观测信号$\{y_i,\ i\leqslant t\}$设计反馈控制 u_t 使得系统的输出$\{y_t\}$跟踪一给定的参考信号$\{y_t^*\}$. 若 $f(\cdot)$已知，则显然控制律可取为

$$u_t = -f(y_t) + y_{t+1}^*.$$

然而，在目前情况下，$f(\cdot)$是未知的，我们采用非参数估计方法[7,8]来首先估计 $f(\cdot)$.

设 $K(\cdot)$是定义于$\mathbb{R}^d$ 上的非负核函数，它满足下列条件：

$$K(0) > 0,\ \int_{\mathbb{R}^d} K(s)\mathrm{d}s = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} K^2(s)\mathrm{d}s < \infty,\ \int_{\mathbb{R}^d} \| s \| K(s)\mathrm{d}s < \infty.$$

进一步，假设 $K(\cdot)$有紧支集，即当 $\| s \| > A$ 时，$K(s) = 0$，其中 $A>0$ 是常数.

设 $\delta_j(\cdot,\cdot)$是由 $K(\cdot)$经如下平移后得到的函数：

$$\delta_j(x,y) \triangleq K(j^a(x-y)),\quad \forall j > 0, \tag{2}$$

其中 $a\in\left(0,\dfrac{1}{2d}\right)$, d 是系统信号的维数，而 $\delta_0(\cdot,\cdot)=0$.

在每一时刻 t，$f(y)$ $(y\in\mathbb{R}^d)$的非参数估计如下：

$$\hat{f}_t(y) = \begin{cases} N_t^{-1}(y)\sum\limits_{j=1}^{t}\delta_{j-1}(y_{j-1},y)\times(y_j-u_{j-1}), & \text{若 } N_t(y) > 0; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{3}$$

其中，

$$N_t(y) \triangleq \sum_{j=1}^{t}\delta_{j-1}(y_{j-1},y). \tag{4}$$

为了定义自适应控制，我们需要引进一个逐渐扩大的截尾界$\{h_t\}$，它是正的、单调发散至

无穷，并且满足

$$h_t = o(\sqrt{\log t}) \quad (t \to \infty). \tag{5}$$

利用(截尾的)必然等价原则，可以定义下列非参数自适应控制如下：

$$u_t = -\hat{f}_t(y_t) I_{(\|\hat{f}_t(y_t)\| \leqslant h_t)} + y_{t+1}^*, \tag{6}$$

其中 $I_{(\cdot)}$ 是示性函数.

在此控制律作用下，闭环系统方程可写为：

$$y_{t+1} = f(y_t) - \hat{f}_t(y_t) I_{(\|\hat{f}_t(y_t)\| \leqslant h_t)} + y_{t+1}^* + \varepsilon_{t+1}, \tag{7}$$

显然这是一个非线性随机动力系统.

为了分析(7)式的性质，我们引进下列关于系统(1)的假设：

(A_1) 非线性函数 $f(\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的，且存在两个常数 $\alpha \in (0,1)$ 及 $\beta \in (0,\infty)$，使得

$$\| f(x) \| \leqslant \alpha \| x \| + \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

(A_2) $\{\varepsilon_t\}$ 是均值为零和方差为 I 的 Gauss 白噪声序列.

(A_3) 参考信号 $\{y_t^*\}$ 是有界的.

本文主要结果如下：

定理 1.1 考虑控制系统(1). 设 $f(\cdot)$ 是未知的非线性函数，且条件(A_1) ~ (A_3)满足. 那么，由(6)式定义的非参数自适应跟踪控制器在下列意义下是渐近最优的：

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \| y_t - y_t^* - \varepsilon_t \|^2 = 0, \quad \text{a.s.}$$

2 定理 1.1 的证明

我们首先证明两个引理.

引理 2.1 在定理 1.1 的条件下有

$$\sup_{\|y\|^2 \leqslant \frac{c}{4}\log t} \| \tilde{f}_t(y) \| = o(t^{-\delta}), \quad \text{a.s.，当 } t \to \infty \text{ 时},$$

其中 $\tilde{f} = \hat{f} - f$, $c \in \left(0, \frac{1}{2} - ad\right)$ 及 $\delta \in \left(0, \min\left\{\left(\frac{1}{2} - ad - c\right), (1 - ad - c)a\right\}\right)$.

证 首先将 $\tilde{f}_t(y)$ 分为两部分：

$$\tilde{f}_t(y) = \hat{f}_t(y) - f(y) = \frac{M_t(y)}{N_t(y)} + \frac{L_t(y)}{N_t(y)}, \tag{8}$$

其中，

$$M_t(y) \triangleq \sum_{j=1}^{t} \delta_{j-1}(y_{j-1}, y) \cdot \varepsilon_j,$$

$$L_t(y) \triangleq \sum_{j=1}^{t} \delta_{j-1}(y_{j-1}, y)[f(y_{j-1}) - f(y)].$$

利用闭环系统方程(7)，条件(5)式及假设(A_1)及(A_3)，我们有

$$\| y_{t+1} \| \leqslant \alpha \| y_t \| + o(\sqrt{\log t}) + O(1) + \| \varepsilon_{t+1} \|.$$

于是利用 $\alpha \in (0,1)$ 得

$$\frac{1}{t} \sum_{j=1}^{t} \| y_j \|^2 = o(\log t). \tag{9}$$

定义

$$z_t \triangleq f(y_t) + u_t, \tag{10}$$

$$\mathscr{F}_{t-1} \triangleq \sigma\{(\varepsilon_j)_{j\leq t-1},\ (y_j^*)_{j\leq t}\},$$

于是 $y_t = z_{t-1} + \varepsilon_t$ 且利用条件(A_2)，

$$\begin{aligned}
&E[K(j^a(y_j - y))|\mathscr{F}_{j-1}] \\
&= C\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right)K(j^a(z_{j-1} + x - y))\mathrm{d}x \\
&= Cj^{-ad}\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left(-\frac{1}{2}\|\lambda j^{-a} + y - z_{j-1}\|^2\right)K(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\
&= Cj^{-ad}\exp\left(-\frac{1}{2}\|\lambda_0 j^{-a} + y - z_{j-1}\|^2\right)\int_{\mathbb{R}^d}K(\lambda)\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned} \tag{11}$$

其中 C 代表正常数(在各处出现时其值未必相同)，且最后一个等式利用了积分中值定理，及 $|\lambda_0| \leq A$(因对 $|\lambda| > A$，$K(\lambda) = 0$).

由于

$$\|y + A - s\|^2 \leq 4\|y\|^2 + 4\|s\|^2 + 2A^2,$$

于是取 $0 < c < \frac{1}{2} - ad$，则对任何 $t \geq 0$ 有

$$\inf\left\{\exp\left(-\frac{1}{2}\|y + A - s\|^2\right) : \|s\|^2 \leq \frac{c}{4}\|\log t,\ \|y\|^2 \leq \frac{c}{4}\log t\right\} \geq Ct^{-c}.$$

于是，利用 $\|z_{j-1}\|^2 \leq \frac{c}{4}\log t$ 及 $\|y\|^2 \leq \frac{c}{4}\log t$ 从(11)式得

$$E[K(j^a(y_j - y))|\mathscr{F}_{j-1}] \geq Cj^{-ad}t^{-c} \geq Ct^{-ad-c}.$$

因此，对 $\|y\|^2 \leq \frac{c}{4}\log t$，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}E[K(j^a(y_j - y))|\mathscr{F}_{j-1}] \\
&\geq Ct^{-ad-c} \times \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}I_{\left(\|z_{j-1}\|^2 \leq \frac{c}{4}\log t\right)} \\
&\geq Ct^{-ad-c} \times \frac{1}{t}\sum_{j=2}^{t}I_{\left(\|z_{j-1}\|^2 \leq \frac{c}{4}\log j\right)}.
\end{aligned} \tag{12}$$

现在，我们证明

$$d_t \triangleq \frac{1}{t}\sum_{j=2}^{t}I_{\left(\|z_{j-1}\|^2 \leq \frac{c}{4}\log j\right)} \to 1,\ \text{a.s.} \tag{13}$$

事实上，

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{t-1}\sum_{j=2}^{t}\left[I_{\left(\|z_{j-1}\|^2 \leq \frac{c}{4}\log j\right)} + I_{\left(\|z_{j-1}\|^2 > \frac{c}{4}\log j\right)}\right] \\
&\leq \frac{t}{t-1}d_t + \frac{1}{t-1}\sum_{j=2}^{t}\frac{\|z_{j-1}\|^2}{\frac{c}{4}\log j}.
\end{aligned} \tag{14}$$

记

$$S_j \triangleq \sum_{i=2}^{j} \| z_{i-1} \|^2,\ j \geqslant 2,\ S_1 \triangleq 0,$$

于是 $\| z_{j-1} \|^2 = S_j - S_{j-1}$. 利用(9)及(10)式,我们有

$$\frac{1}{t} \sum_{j=2}^{t} \| z_{j-1} \|^2 = o(\log t),\ \text{i.e.},\ S_t = o(t \log t).$$

于是,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \sum_{j=2}^{t} \frac{\| z_{j-1} \|^2}{\log j} &= \frac{1}{t} \sum_{j=2}^{t} \frac{S_j - S_{j-1}}{\log j} \\
&= \frac{1}{t} \left\{ \sum_{j=2}^{t-1} \left(\frac{S_j}{\log j} - \frac{S_j}{\log(j+1)} \right) - \frac{S_1}{\log 2} + \frac{S_t}{\log t} \right\} \\
&\leqslant \frac{1}{t} \left\{ \sum_{j=2}^{t-1} \frac{S_j}{j \log^2 j} - \frac{S_1}{\log 2} + \frac{S_t}{\log t} \right\} \\
&\to 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

另一方面,显然 $d_t \leqslant 1$. 于是,利用(14)及(15)式知 $d_t \to 1$, a.s. 因此(13)式成立,从而利用(12)式,

$$\liminf_{t \to \infty} t^{ad+c-1} \times \inf_{\| y \|^2 \leqslant \frac{c}{4} \log t} \left\{ \sum_{j=1}^{t} E[K(j^a(y_j - y)) | \mathscr{F}_{j-1}] \right\} \geqslant C. \tag{16}$$

进一步,利用鞅差序列的一致大数定律(见文献[7]中定理 6.4.34),我们有

$$\begin{aligned}
&\sup_{\| y \|^2 \leqslant \frac{c}{4} \log t} \left\{ \left| N_t(y) - \sum_{j=1}^{t-1} E[K(j^a(y_j - y)) | \mathscr{F}_{j-1}] \right| \right\} \\
&= o(t^\sigma),\ \text{a.s.}\ \forall \sigma > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

于是对 $1 - c - ad > \frac{1}{2} \left(即\ 0 < a < \frac{1}{2d} 及\ c < \frac{1}{2} - ad \right)$,据上式及(16)式有

$$\liminf_{t \to \infty} t^{ad+c-1} \inf_{\| y \|^2 \leqslant \frac{c}{4} \log t} \{ N_t(y) \} \geqslant C. \tag{17}$$

因此,存在某个 $t_1 > 0$,使得当 $t > t_1$ 及 $\| y \|^2 \leqslant \frac{c}{4} \log t$ 时有 $N_t(y) > 0$. 于是注意到 $f(\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的且 $K(\cdot)$ 有紧支集,根据 $L_t(y)$ 的定义我们有

$$\begin{aligned}
\| L_t(y) \| &\leqslant C \sum_{j=1}^{t-1} K(j^a(y_j - y)) \| y_j - y \| \\
&\leqslant C \sum_{j=1}^{t-1} j^{-a} K(j^a(y_j - y)) \\
&\leqslant C + C \sum_{j=t_1+1}^{t-1} K(j^a(y_j - y))(N_j(y))^{-a} \\
&= C + C \sum_{j=t_1+1}^{t-1} [N_{j+1}(y) - N_j(y)] \cdot (N_j(y))^{-a} \\
&\leqslant C + C(N_t(y))^{1-a}/(1-a).
\end{aligned} \tag{18}$$

再次利用一致大数定律，根据 $M_t(y)$ 的定义我们有

$$\sup_{\|y\|^2\leqslant\frac{c}{4}\log t}\|M_t(y)\| = o(t^{\sigma}),\ \text{a.s.}\ \forall\sigma>\frac{1}{2}. \tag{19}$$

于是，利用(17)～(19)式从(8)式得

$$\sup_{\|y\|^2\leqslant\frac{c}{4}\log t}\|\tilde{f}_t(y)\| = o(t^{-\delta}),$$

其中 $\delta<\min\left\{\left(\frac{1}{2}-ad-c\right),\ (1-ad-c)a\right\}$. 证毕.

引理 2.2　在定理 1.1 的条件下，对任意 $m\geqslant1$，有

$$\sum_{j=1}^{t}\|y_{j+1}\|^m = O(t),\ \text{a.s.},\ \text{当}\ t\to\infty\ \text{时}.$$

证　据闭环系统方程(7)，我们有

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= f(y_t)-\hat{f}_t(y_t)I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|\leqslant h_t\}}+y_{t+1}^*+\varepsilon_{t+1}\\ &=[f(y_t)-\hat{f}_t(y_t)]I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|\leqslant h_t\}}+f(y_t)I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|>h_t\}}+y_{t+1}^*+\varepsilon_{t+1}, \end{aligned}$$

于是，对任意整数 $m\geqslant1$ 有

$$\begin{aligned}\|y_{t+1}\|^m\leqslant{}&\lambda_1\left\|[f(y_t)-\hat{f}_t(y_t)]I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|\leqslant h_t\}}+f(y_t)I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|>h_t\}}\right\|^m\\ &+\lambda_2\|y_{t+1}^*+\varepsilon_{t+1}\|^m,\end{aligned}$$

其中，$\lambda_1>1$ 是适当选取的常数以使得 $\lambda_1\alpha^m=\alpha_1<1$.

于是，注意到 $\{\|\hat{f}_t(y_t)\|\leqslant h_t\}$ 及 $\{\|\hat{f}_t(y_t)\|>h_t\}$ 不相交，我们有

$$\begin{aligned}\|y_{t+1}\|^m\leqslant{}&\lambda_1\|f(y_t)-\hat{f}_t(y_t)\|^m I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|\leqslant h_t\}}\\ &+\lambda_1\|f(y_t)\|^m I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|>h_t\}}+\lambda_2\|y_{t+1}^*+\varepsilon_{t+1}\|^m\\ ={}&\lambda_1\|f(y_t)-\hat{f}_t(y_t)\|^m I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|\leqslant h_t,\ \|y_t\|^2\leqslant\frac{c}{4}\log t\}}\\ &+\lambda_1\|f(y_t)-\hat{f}_t(y_t)\|^m I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|\leqslant h_t,\ \|y_t\|^2\geqslant\frac{c}{4}\log t\}}\\ &+\lambda_1\|f(y_t)\|^m I_{\{\|\hat{f}_t(y_t)\|>h_t\}}+\lambda_2\|y_{t+1}^*+\varepsilon_{t+1}\|^m.\end{aligned}$$

进一步，利用引理 3.1，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{t}\|y_{j+1}\|^m\leqslant{}&o(t)+\lambda_1\sum_{j=1}^{t}[\lambda_3\|f(y_j)\|^m\\ &+\lambda_4\|\hat{f}_j(y_j)\|^m]\times I_{\{\|\hat{f}_j(y_j)\|\leqslant h_j,\ \|y_j\|^2>\frac{c}{4}\log j\}}\\ &+\lambda_1\sum_{j=1}^{t}\|f(y_j)\|^m I_{\{\|\hat{f}_j(y_j)\|>h_j\}}+O(t),\end{aligned}$$

其中，$\lambda_3>1$ 可以取得使 $\lambda_1\lambda_3\cdot\alpha^m=\lambda_3\cdot\alpha_1\triangleq\alpha_3<1$.

因此，

$$\sum_{j=1}^{t}\|y_{j+1}\|^m\leqslant\alpha_3\sum_{j=1}^{t}\|y_j\|^m$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda_1\lambda_4\sum_{j=1}^{t}\|\hat{f}_j(y_j)\|^m\times I_{\left\{\|\hat{f}_j(y_j)\|\leqslant h_j,\ \|y_j\|^2>\frac{c}{4}\log j\right\}}+O(t)\\
&\leqslant\alpha_3\sum_{j=1}^{t}\|y_j\|^m+\lambda_1\lambda_4\sum_{j=1}^{t}h_j^m\frac{\|y_j\|^m}{\left(\frac{c}{4}\log j\right)^{\frac{m}{2}}}+O(t).
\end{aligned}
$$

这样,利用(5)式我们就有 $\sum_{j=1}^{t}\|y_{j+1}\|^m=O(t)$.

定理 1.1 的证 由闭环系统方程(7),我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\|y_{j+1}-y_{j+1}^{*}-\varepsilon_{j+1}\|^2\\
&=\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\|f(y_j)-\hat{f}_j(y_j)\|^2 I_{\{\|\hat{f}_j(y_j)\|\leqslant h_j\}}+\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\|f(y_j)\|^2 I_{\{\|\hat{f}_j(y_j)\|>h_j\}}\\
&=\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\|f(y_j)-\hat{f}_j(y_j)\|^2 I_{\left\{\|\hat{f}_j(y_j)\|\leqslant h_j,\ \|y_j\|^2\leqslant\frac{c}{4}\log j\right\}}\\
&\quad+\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\|f(y_j)-\hat{f}_j(y_j)\|^2\times I_{\left\{\|\hat{f}_j(y_j)\|\leqslant h_j,\ \|y_j\|^2>\frac{c}{4}\log j\right\}}\\
&\quad+\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\|f(y_j)\|^2 I_{\left\{\|\hat{f}_j(y_j)\|>h_j,\ \|y_j\|^2\leqslant\frac{c}{4}\log j\right\}}\\
&\quad+\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\|f(y_j)\|^2 I_{\left\{\|\hat{f}_j(y_j)\|>h_j,\ \|y_j\|^2>\frac{c}{4}\log j\right\}}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

在集合 $\left\{\|y_j\|^2\leqslant\frac{c}{4}\log j\right\}$ 上,利用引理 2.1,我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\|f(y_j)-\hat{f}_j(y_j)\|^2 I_{\left\{\|y_j\|^2\leqslant\frac{c}{4}\log j\right\}}=o(1),\\
&\|\hat{f}_j(y_j)\|\,I_{\left\{\|y_j\|^2\leqslant\frac{c}{4}\log j\right\}}\leqslant\|f(y_j)\|+o(1).
\end{aligned}
$$

因此将上两式代入(20)式得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\|y_{j+1}-y_{j+1}^{*}-\varepsilon_{j+1}\|^2\\
&\leqslant o(1)+\frac{2}{t}\sum_{j=2}^{t}\|f(y_j)\|^2 I_{\left\{\|y_j\|^2>\frac{c}{4}\log j\right\}}\\
&\quad+\frac{2}{t}\sum_{j=2}^{t}\|\hat{f}_j(y_j)\|^2 I_{\left\{\|\hat{f}_j(y_j)\|\leqslant h_j,\ \|y_j\|^2>\frac{c}{4}\log j\right\}}\\
&\quad+\frac{1}{t}\sum_{j=2}^{t}\|f(y_j)\|^2\frac{\|f(y_j)\|+o(1)}{h_j}\\
&\quad+\frac{1}{t}\sum_{j=2}^{t}\|f(y_j)\|^2\frac{\|y_j\|^2}{\frac{c}{4}\log j}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

注意到,利用引理 2.2 及条件(A_1),我们有

$$\frac{1}{t}\sum_{j=2}^{t}\frac{\| f(y_j) \|^3}{h_j} = o(1),$$

$$\frac{1}{t}\sum_{j=2}^{t}\| f(y_j) \|^2 \frac{\| y_j \|^2}{\frac{c}{4}\log j} = o(1).$$

进一步，利用(5)式我们有

$$\frac{1}{t}\sum_{j=2}^{t}\| \hat{f}_j(y_j) \|^2 I_{\left\{ \| \hat{f}_j(y_j) \| \leqslant h_j,\ \| y_j \|^2 > \frac{c}{4}\log j \right\}}$$

$$= \frac{1}{t}\sum_{j=2}^{t} h_j^2 \cdot \frac{\| y_j \|^2}{\frac{c}{4}\log j} = o(1).$$

因此，从(21)式可得 $\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\| y_{j+1} - y_{j+1}^{*} - \varepsilon_{j+1} \|^2 = o(1)$，故定理得证.

3　结束语

对由未知的非参数非线性函数描述的一类离散时间动态控制系统，当噪声是正态白噪声时，我们证明了无需引进任何外部激励信号，就可以设计一个渐近最优的非参数自适应控制器. 在最近的一项工作中[1)]，我们证明了当 $d=1$ 时，假设条件(A1)中的 $\alpha \in (0,1)$ 一般不能放松为 $\alpha \geqslant 4$. 但当 $\alpha \in [1,4)$ 时，由(6)式定义的非参数自适应控制器是否仍具有渐近最优性是值得进一步研究的问题.

参　考　文　献

1 Chen H F, Guo L. Identification and Stochastic Adaptive Control. Boston: Birkhäuser, 1991

2 Ioannou P A, Sun J. Robust Adaptive Control. NJ: Prentice-Hall, 1996

3 魏　晨. 一类非线性随机系统的自适应控制. 控制理论与应用，1997，14(6)：817～821

4 Xie L L, Guo L. Fundamental limitations of discrete-time adaptive nonlinear control. IEEE Trans Automat Contr, 1999, 44(9): 1 777～1 781

5 Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P V. Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: John Wiley & Sons, 1995

6 Narendra K S, Parthasarathey K. Identification and control of dynamical systems using neural networks. IEEE Trans Neural Networks, 1990, (1): 4～27

7 Duflo M. Random Iterative Models. Berlin: Springer-Verlag, 1997

8 Rao Prakasa B L S. Nonparametric Functional Estimation. New York: Academic Press, 1983

1) Xie L L, Guo L. How much uncertainty can be dealt with by feedback? IEEE Trans Automat Control, 2000(待发表)